## Задания для учащихся 9 класса

**1.** В школьной олимпиаде по математике участвовало 24 учащихся класса, в олимпиаде по информатике — 22 ученика этого же класса, в олимпиаде по физике — 19 учащихся и в олимпиаде по химии — 17 учащихся. Какое наименьшее количество учащихся класса участвовало во всех четырёх этих олимпиадах, если в классе 25 учащихся?

**А.** 5. **Б.** 6. **В.** 7. **Г.** 8.

 В математической олимпиаде не участвовал один ученик класса. Если он участвовал в олимпиаде по информатике, то в обеих этих олимпиадах участвовал 22 – 1 = 21 учащийся. Если он не участвовал в олимпиаде по информатике, то в обеих олимпиадах по математике и информатике участвовало 22 ученика класса. Следовательно, наименьшее количество учащихся, которые могли принять участие в двух олимпиадах по математике и информатике, равно 21.

Предположим, что в обеих олимпиадах по математике и информатике участвовал 21 учащийся класса.

Если 25 – 21 = 4 учащихся, не участвовавших хотя бы в одной олимпиаде по математике или информатике, приняли участие в олимпиаде по физике, то в трёх указанных олимпиадах участвовало 19 – 4 = 15 учащихся. Рассуждением, аналогичным приведенному выше, убеждаемся, что это наименьшее количество. Это же рассуждение показывает, что увеличение количества участников двух олимпиад по математике и информатике приводит к увеличению количества участников трёх олимпиад.

Предположим, что в трёх олимпиадах по математике, информатике и физике участвовал 15 учащихся класса.

Если 25 – 15 = 10 человек, не участвовавших хотя бы в одной олимпиаде по математике, информатике или по физике, приняли участие в олимпиаде по химии, то в четырёх олимпиадах участвовало 17 – 10 = 7 учащихся. Ещё раз повторяя приведенные выше рассуждения, приходим к выводу, что искомое количество равно 7.

**Ответ. В.** 7.

**2.** Известно, что плотность 100%-й азотной кислоты при 20°C приближённо равна 1,51 г/см$^3$, плотность воды при 20°C составляет 0,998 г/см$^3$. Сколько миллилитров 100%-й азотной кислоты с точностью до 1 мл надо влить в 1000 миллилитров воды для получения 50%-й кислоты, если температура кислоты и воды 20°C. Выберите наиболее точное значение.

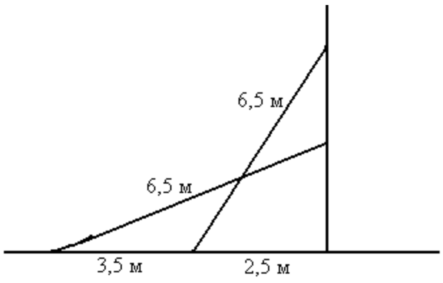
**А.** 661 мл. **Б.** 656 мл. **В.** 651 мл. **Г.** 678 мл.

 Масса $x$ мл чистой кислоты равна $1{,}51\cdot x$ г, масса 1000 мл воды равна $0{,}998\cdot 1000 = 998$ (г), так что суммарная масса компонентов раствора составляет $(998 + 1{,}51x)$ г. Поскольку масса чистой кислоты в 50%-м растворе совпадает с массой влитой 100%-й кислоты, то получаем уравнение $1{,}51x = 0{,}5(998 + 1{,}51x)$ Откуда $x \approx 661$ (мл).

**Ответ. А.** 661 мл.

**3.** Лестница длиной 6,5 метра наклонно приставлена к стене, нижний конец её при этом удален от стены на 2,5 метра. На сколько опустится она по стене, если её нижний конец отодвинуть ещё на 3,5 метра?

**А.** На 4 м. **Б.** На 3,5 м. **В.** На 3 м. **Г.** На 2,5 м.




 Расстояние от пола до верхнего конца лестницы равно $\sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6$ м. Если основание лестницы отодвинуть на 3,5 м, то её нижняя часть будет удалена от стены на 2,5 + 3,5 = 6 метров. Тогда расстояние от пола до верхнего конца лестницы равно $\sqrt{6,5^2 - 6^2} = 2,5$ м. Лестница опустится по стене на 6 – 2,5 = 3,5 м (см. рис.).

**Ответ. Б.** На 3,5 м.

**4.** Кассир продал все билеты в первый ряд кинотеатра, причем по ошибке на одно из мест было продано два билета. Сумма номеров мест на всех этих билетах равна 857. На какое место продано два билета?

**А.** На 41-е. **Б.** На 40-е. **В.** На 38-е. **Г.** На 37-е.

 Вычислим сумму $S_n$ номеров $n$ мест в ряду кинотеатра: $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$.

Заметим, что 1 + $n$ = 2 + ($n$ – 1) = 3 + ($n$ – 2) = … = $n$ + 1. Если $n$ — число чётное, $n$ = 2$k$, то таких пар слагаемых будет $k = \frac{n}{2}$, тогда искомая сумма будет равна $(n + 1)\cdot\frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

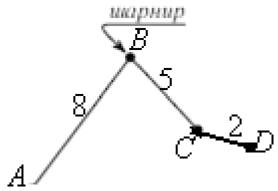
Если же $n$ — число нечётное, $n$ = 2$k$ + 1, то таких пар $k = \frac{n-1}{2}$ и, кроме того ещё одно слагаемое, среднее, равное $\frac{n+1}{2}$. Тогда искомая сумма будет равна $(n + 1)\cdot\frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

В обоих случаях результат один и тот же.

Количество мест в первом ряду не больше 40, так как $S_{41} = \frac{41\cdot 42}{2} = 861 > 857$. Количество мест в первом ряду не меньше 40, поскольку $S_{39} = \frac{39\cdot 40}{2} = 780$, а 780 + 39 = 819, что меньше 857. Следовательно, в первом ряду 40 мест. Так как $S_{40} = \frac{40\cdot 41}{2} = 820$, а 857 – 820 = 37, то два билета проданы на место с номером 37.

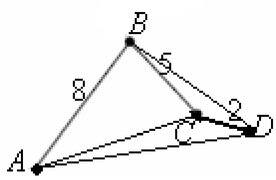
**Ответ. Г.** На 37-е.

**5.** Трёхзвенный шарнир состоит из звеньев длиной 2 см, 5 см и 8 см, которые могут свободно вращаться вокруг точек их соединения. Чему равна разность между наибольшим и наименьшим расстояниями между его концами?




**А.** 15 см. **Б.** 14 см. **В.** 13 см. **Г.** 10 см.

 Геометрическая модель шарнира и расстояний между его концами изображена на рисунке.



Из неравенства треугольника вытекает, $AD \le AC + CD$, $AC \le AB + BC$, поэтому $AD \le AB + BC + CD = 8 + 5 + 2 = 15$ (см. рис.). Это значение достигается, если точки $A$, $B$, $C$, $D$ лежат на одной прямой в указанном порядке. Итак, наибольшее значение $AD$ равно 15 см.

Кроме того, из неравенства треугольника вытекает, что $AD \ge AC - CD$ ($AC > CD$), $AC \ge AB - BC$ ($AB > BC$). Поэтому $AD \ge AB - BC - CD = 8 - 5 - 2 = 1$ (см. рис.). Следовательно, наименьшее значение $AD = 1$ см. Оно достигается, когда точки $C$ и $D$ лежат на отрезке $AB$, причём точка $D$ между точками $A$ и $C$. Таким образом, разность между наибольшим и наименьшим расстояниями между концами шарнира равна 15 – 1 = 14 см.

**Ответ. Б.** 14 см.

**6.** У Наташи были короткие, средние и длинные ленты. Она разрезала их на маленькие ленточки для своих кукол, которых у неё очень много. Каждую короткую ленту она разрезала 11 раз, каждую среднюю — 22 раза, каждую длинную — 44 раза. У неё получилось 219 маленьких ленточек. Какое наибольшее количество длинных лент было у Наташи?

**А.** 2. **Б.** 3. **В.** 4. **Г.** 5.

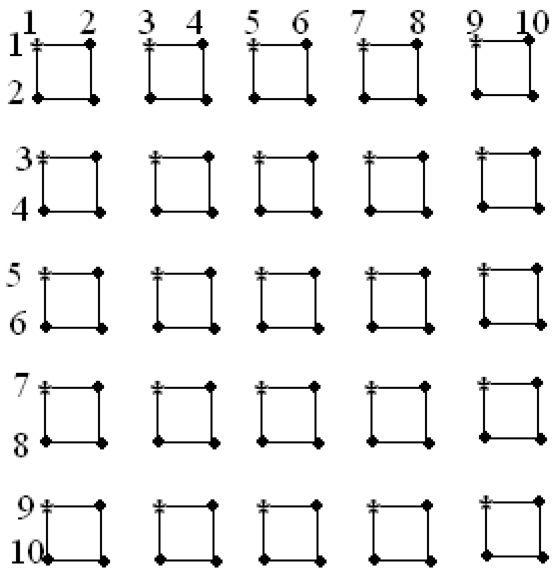
Обозначим количество коротких лент через $x$, количество средних — через $y$, а количество длинных — через $z$. Так как количество ленточек, полученных из каждой ленты, на 1 больше количества разрезов этой ленты, то из каждой короткой ленты Наташа получила 12 ленточек, из каждой средней — 23, а из каждой длинной — 45. По условию имеем уравнение: $12x + 23y + 45z = 219$. Наибольшее натуральное значение $z$, которое может удовлетворять этому уравнению, равно 4. Если $z = 4$, то уравнение принимает вид $12x + 23y = 39$. Оно решений в натуральных числах не имеет. Если $z = 3$, то уравнение принимает вид $12x + 23y = 84$. Из уравнения следует, что $y$ может принимать только чётное значение 2, но тогда уравнение $12x = 38$ натуральных решений не имеет. Если $z = 2$, то уравнение принимает вид $12x + 23y = 129$. Из уравнения следует, что $y$ может принимать только нечётные значения 1, 3 и 5. При $y = 1$ и $y = 5$ уравнение принимает соответственно вид $12x = 106$ и $12x = 4$, которые натуральных решений не имеют. При $y = 3$ значение $x$ равно 5.

Следовательно, самое большее у Наташи могли быть 2 длинные ленты.

**Ответ. А.** 2.

**7.** В парке 100 больших деревьев, расположенных в десяти рядах на одинаковых расстояниях друг от друга, равных расстояниям между рядами. Какое наибольшее количество деревьев можно спилить так, чтобы, сидя на любом пеньке, нельзя было увидеть никакой другой пенёк?

**А.** 50. **Б.** 25. **В.** 20. **Г.** 10.




На рисунке изображено 100 деревьев, расположение которых удовлетворяет условию. На нём выделено 25 квадратиков, на каждом из которых посажено по 4 дерева в вершинах квадратиков. В каждом таком квадратике можно спилить не более одного дерева. Следовательно, искомое количество не больше 25. Оно равно 25, если спилить деревья, помеченные на рисунке знаком *.

**Ответ. Б.** 25.

**8.** Какое наибольшее количество листков календаря можно вырвать так, чтобы на любых двух из них было указано либо одно и то же число месяца, либо один и тот же месяц, либо один и тот же день недели?

**А.** 31. **Б.** 52. **В.** 53. **Г.** 54.

 Так как в году 12 месяцев, то количество листков с одним и тем же числом (датой) равно 12, количество листков, на которых указан один и тот же месяц, не более 31. Количество листков, на которых указан один и тот же день недели, может быть равно 53, так как в году 52 недели и ещё, по крайней мере, один день. Следовательно, искомое число будет не меньше 53, если вырвать листки, на которых указан один и тот же день недели, именно тот, с которого начинается год. К ним нельзя добавить ни одного листка, так как для любого числа месяца и любого месяца можно найти листок из указанных 53-х, в котором дата и месяц другие, а дни недели разные по предположению.

Покажем, что в любой совокупности листков, удовлетворяющих условию и содержащих два листка с разными днями недели, не более 53 листков. Если на этих листках одинаковые месяцы, то выберем из этой совокупности все листки, на которых указан тот же месяц. Их всего не более 31. Затем выберем листки, на которых такие же числа (даты), как и на двух первоначальных. Их не более 22. Всего выбрано не более 53 листков. Если в рассматриваемой совокупности остался листок, то он хотя бы с одним из выбранных первоначально не имеет одинаковых ни дня недели, ни месяца, ни числа.

Если на двух листках совокупности разные дни недели и разные месяцы, то на них одинаковые числа (даты). Выберем из совокупности все листки, на которых эта дата. Их не более 12. Для простоты изложения будем предполагать, что на одном из первоначальных листков указаны среда и январь, а на другом — четверг и март. Выберем из оставшейся совокупности все листки, на которых указаны среда и январь, четверг и март. Их не более 10, так как в январе не более 5 сред, а в марте не более 5 четвергов. Всего выбрано не более $12 + 10 = 22$ листков. Если остался листок, то на нём число, отличное от числа, указанного на двух первоначально выбранных. Предположим, что на нём указана среда, тогда с листком, где указаны четверг и март, он не имеет ни одного совпадения. Аналогично рассматриваются и другие случаи.

**Ответ. В.** 53.

**9.** В теннисном турнире принимали участие 6 мальчиков и несколько девочек. Каждые два участника сыграли между собой две партии. Мальчики выиграли в два раза больше партий, чем девочки. Какое из приведенных количеств партий не могли выиграть девочки у ребят, если ничьих не было?

**А.** 10. **Б.** 14. **В.** 18. **Г.** 22.

 Обозначим количество девочек через $n$. Мальчики сыграли между собой $6\cdot5 = 30$ партий, девочки между собой — $n\cdot(n - 1)$, а мальчики с девочками — $2\cdot6\cdot n = 12n$ партий.

Пусть девочки выиграли у мальчиков $d$ партий. Тогда мальчики выиграли у девочек $12n - d$ партий. Всего мальчики выиграли $30 + 12n - d$ партий, а девочки — $n\cdot(n - 1) + d$ партий. Из условия следует уравнение $30 + 12n - d = 2(n\cdot(n - 1) + d)$ или $2n^2 - 14n - 30 + 3d = 0$.

Проверим, какое из приведенных в ответах значений удовлетворяет условию.

Если $d = 10$, то имеем уравнение $2n^2 - 14n = 0$, которое имеет натуральное решение 7.

Если $d = 14$, то имеем уравнение $2n^2 - 14n + 12 = 0$ или $n^2 - 7n + 6 = 0$, корнями которого являются числа 6 и 1.

Если $d = 18$, то уравнение принимает вид $2n^2 - 14n + 24 = 0$ или $n^2 - 7n + 12 = 0$, корнями которого являются числа 4 и 3.

Следовательно, девочки могли выиграть у мальчиков и 10, и 14, и 18 партий.

Если $d = 22$, то имеем уравнение $2n^2 - 14n + 36 = 0$ или $n^2 - 7n + 18 = 0$, которое действительных корней не имеет, так как его дискриминант — отрицательное число.

**Ответ. Г.** 22.

**10.** В карьере заготовлено 200 гранитных плит, 120 из которых весят по 7 тонн каждая, а остальные по 9 тонн. На железнодорожную платформу можно грузить до 40 тонн. Какое наименьшее количество платформ понадобится для вывоза плит?

**А.** 42. **Б.** 41. **В.** 40. **Г.** 39.

 Понадобится 40 платформ. Общая масса плит равна $7\cdot120 + 9\cdot(200 - 120) = 1560$ т, следовательно, понадобится не менее $1560:40 = 39$ платформ. Но нагрузить платформу полностью не удаётся, так как уравнение $7x + 9y = 40$ в натуральных числах решений не имеет. Здесь через $x$ и $y$ обозначены количества 7-тонных и 9-тонных плит соответственно.

Действительно, $y \le 4$. Если $y = 1, 2, 3, 4$, то уравнение принимает соответственно вид: $7x = 31$, $7x = 22$, $7x = 13$ и $7x = 4$. Ни одно из этих уравнений натуральных решений не имеет.

Вместе с тем на каждую платформу можно погрузить 39 т: нужно класть на каждую платформу 2 плиты по 9 т и 3 плиты по 7 т. Так как $120:3 = 40$ и $80:2 = 40$, то 40 платформ будет достаточно. Это и есть наименьшее количество платформ, которые понадобятся для вывоза плит.

**Ответ. В.** 40 платформ.

**11.** В тесте каждое задание оценивается 0 или 1 баллом. Средний балл по тесту всех учащихся класса, кроме Петрова, равен $28\frac{4}{7}$, а всех учащихся, кроме Иванова, — $28\frac{3}{5}$.

1) Сколько учащихся в этом классе, если в нём не более 40 человек?

2) Кто больше набрал баллов — Петров или Иванов и на сколько?

3) Чему равен средний балл по тесту всех учащихся класса, если Петров и Иванов вместе набрали 51 балл?

 Обозначим количество учащихся класса через $n$, а через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — баллы учащихся. При этом $x_1$ — балл Петрова, а $x_2$ — балл Иванова.

1) Из условия задачи следуют равенства:

$$\frac{x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n-1} = 28\frac{4}{7} = \frac{200}{7}; \quad \frac{x_1 + x_3 + \ldots + x_n}{n-1} = 28\frac{3}{5} = \frac{143}{5}.$$

Следовательно, $n - 1 = 7k = 5p$, где $k$ и $p$ — некоторые натуральные числа, причём $k$ делится на 5, а $p$ — на 7. Так как в классе не более 40 учеников, то условию задачи удовлетворяют значения $k = 5$, $p = 7$. Тогда $n - 1 = 35$, $n = 36$.

2) Так как $n - 1 = 35$, то из приведенных равенств вытекают следующие равенства:

$$x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1000,$$
$$x_1 + x_3 + \ldots + x_n = 1001.$$

Вычитая из второго равенства первое, получим: $x_1 - x_2 = 1$. Следовательно, Петров набрал на 1 балл больше, чем Иванов.

3) Сложив приведенные равенства, получим равенство

$$x_1 + x_2 + 2(x_3 + \ldots + x_n) = 2001.$$

Из этого равенства и равенства $x_1 + x_2 = 51$ следует равенство $x_3 + \ldots + x_n = 975$. Следовательно, $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 51 + 975 = 1026$. Тогда средний балл всех учащихся равен $\frac{1026}{36} = 28{,}5$.

**Ответ.** 1) 36: 2) Петров на 1 балл больше; 3) 28,5.

**12.** Можно ли торт, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, разрезать длинным ножом на $n$ частей одинаковой массы, если: 1) $n = 4$; 2) $n = 3$; 3) $n = 6$ и куски можно передвигать?

□ Для проведения разрезов изобразим торт в виде прямоугольника (рис. 1).

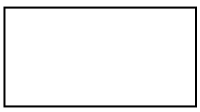


Рис. 1

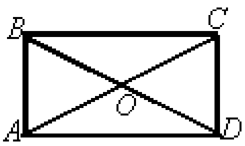


Рис. 2

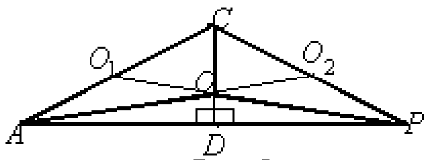


Рис. 3

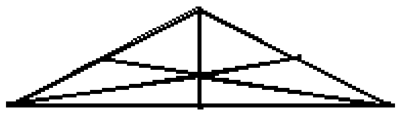


Рис. 4

1) Разрез торта на 4 равные по массе части изображён на рис. 2. Равенство масс следует из равенства площадей треугольников, на которые делят прямоугольник его диагонали.

2) Разрез торта на 3 равные по массе части показан на рис. 3. На нём изображён треугольник $APC$, составленный из треугольников $ADC$ и $ABC$ на рис. 2. Точки $O_1$ и $O_2$ соответствуют точке $O$ и поэтому являются серединами сторон.

Следовательно, точка $O$ — точка пересечения медиан — может быть отмечена. Соединяя её с вершинами $A$, $C$, $P$, получим три треугольника. Их площади равны.

Так как точка $O$ делит $DC$ в отношении 2:1, считая от точки $C$, то $S_{\Delta OPC} = S_{\Delta OAC} = 2S_{\Delta OBD} = 2 \cdot \frac{1}{2} S_{\Delta AOP} = S_{\Delta AOP}$. Значит, равны массы соответствующих кусков торта.

3) Для получения 6 равных частей достаточно провести разрезы $OO_1$, $OO_2$, $OD$ на рис. 3 (рис. 4). Площади шести полученных треугольников равны, так как $O_1$, $O_2$, $D$ — середины сторон.

**Ответ.** Можно.

**13.** В классе, где учится Николай, на каникулы учитель математики задал 101 задачу. За правильно решённую задачу он начислял 3 балла, за неправильно решённую снимал 1 балл, а за задачу, которую ученик не решал, снимал 15 баллов. Николай набрал 211 баллов. Какое наибольшее количество задач он мог решить правильно?

 Обозначим через $x$ и $y$ количества задач, которые Николай решил соответственно правильно и неправильно, тогда он не приступал к решению $(101 - x - y)$ задач. По условию, имеем уравнение $3x - y - 15((101 - x - y) = 211$, или $18x + 14y = 1726$, или $9x + 7y = 863$. Так как $x$ и $y$ — натуральные числа, то $x \le \frac{863}{9} < 96$. Если $x = 95$, то уравнение примет вид $7y = 8$, которое решений в натуральных числах не имеет.

Каждое уменьшение значения $y$ на 1 приведёт к увеличению правой части уравнения $7y = 863 - 9x$ на 9. Поэтому при $x = 95, 94, 93, 92, 91, 90, 89, 88, 87, 86, 85$ будем получать уравнения: $7y = 8$, $7y = 17$, $7y = 26$, $7y = 35$, $7y = 44$, $7y = 53$, $7y = 62$, $7y = 71$, $7y = 80$, $7y = 89$, $7y = 98$. Из полученных правых частей делится на 7, 35 и 98. Итак, наибольшее значение $x$ равно 92, то есть Николай мог самое большее правильно решить 92 задачи.

**Ответ.** 92.

**14.** При стрельбе по мишени спортсмен выбивал и 8, и 9, и 10 очков и только эти очки. Всего он выбил 100 очков, сделав более 11 выстрелов.

1) Сколько выстрелов сделал спортсмен?

2) Сколько раз он выбил 8 очков?

 Обозначим через $x$, $y$, $z$ количества выстрелов, при которых выбито 8, 9, 10 очков соответственно.

1) Из условия следует равенство $8x + 9y + 10z = 100$. Отсюда следует, что $8(x + y + z) < 100$ или $x + y + z < 12{,}5$. Так как $x + y + z$ — это количество выстрелов, и, по условию, спортсмен сделал более 11 выстрелов, то оно равно 12.

2) Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 12, \\ 8x + 9y + 10z = 100. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 8 и вычтя левые и правые части полученного уравнения из левой и правой частей второго уравнения, получим уравнение $y + 2z = 4$. Так как $y$ и $z$ принимают натуральные значения, то его единственным решением является пара $y = 2$, $z = 1$. Тогда $x = 12 - (2 + 1) = 9$. Следовательно, 8 очков спортсмен выбил 9 раз.

**Ответ.** 1) 12; 2) 9.