Задания для учащихся 8 класса

1. Полная стоимость доставки мебели больших габаритов в фирме по перевозке складывается из стоимости её доставки к дому и стоимости подъёма мебели на необходимый этаж. Стоимость подъёма мебели на каждый следующий этаж превышает стоимость её подъёма на предыдущий на одну и ту же величину. Найдите полную стоимость доставки мебели на 11-й этаж дома, если известно, что Петровым, живущим на 4-м этаже, доставка мебели обошлась в 890 руб., а Ивановым, живущим на 7-м этаже, доставка мебели из той же фирмы, — в 980 руб.

А. 950 руб. **Б.** 1000 руб. **В.** 1100 руб. **Г.** 1150 руб.

□ Обозначим превышение стоимости подъёма мебели на каждый следующий этаж по сравнению с предыдущим через c. Так как между 7-м и 4-м этажами расположено 3 этажа, то из условия следует равенство $3c = 980 - 890 = 90$, $c = 30$ (руб.) Тогда полная стоимость подъёма мебели на 11-й этаж равна $980 + 4 \cdot 30 = 1100$ (руб.)

Ответ. В. 1100 руб.

2. Группа из пяти мальчиков – Андрея, Бориса, Василия, Григория и Дмитрия — отправились в поход. Мальчики бросают жребий, чтобы определить двоих дежурных. Какова вероятность того, что дежурными окажутся Андрей и Борис?

А. $\frac{1}{10}$. **Б.** $\frac{1}{5}$. **В.** $\frac{2}{5}$. **Г.** $\frac{1}{6}$.

□ В задаче рассматривается опыт — случайный выбор двух ребят из пяти. Разберём все результаты этого опыта, обозначив ребят первыми буквами их имён: АБ, АВ, АГ, АД, БВ, БГ, БД, ВГ, ВД, ГД. Всего 10 исходов. Так как выбор осуществляется с помощью жребия, то исходы равновозможны.

Событие — дежурными окажутся Андрей и Борис — наступает при одном исходе АБ. Поэтому его вероятность равна $\frac{1}{10}$.

Ответ. А. $\frac{1}{10}$.

3. В турнире по футболу участвовало 5 команд. Каждая команда должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с погодными условиями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное количество очков, и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее количество игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль?

А. 8. **Б.** 7. **В.** 6. **Г.** 5.

□ Так как все команды набрали различное количество очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля, то в турнире разыграно не менее $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ очков. Поскольку за игру команды в сумме набирали не более трёх очков, то сыграно не менее пяти игр. Но пять игр не могло произойти, ибо тогда все игры закончились бы чьей-то победой и не было бы команды набравшей одно очко.
За шесть игр это могло случиться, например, команды 1 и 2, 2 и 5, 4 и 5 сыграли вничью, а команды 3, 4, 5 выиграли у команды 1. Тогда команда 1 набрала бы 1 очко, команда 2 — два очка, команда 3 — три очка, команда 4 — четыре очка, команда 5 — пять очков.

Ответ. В. 6.

4. В математической олимпиаде участвовал 21 из 25 учащихся класса, а в олимпиаде по информатике — 18, а по физике — 16. Какое наименьшее количество учащихся класса могли принять участие во всех трёх этих олимпиадах?

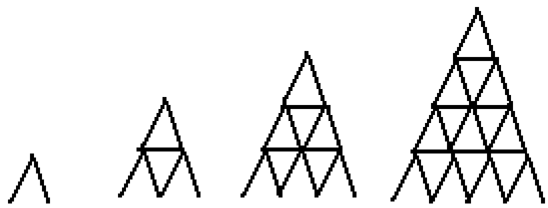
А. 7. **Б.** 5. **В.** 4. **Г.** 3.

 В олимпиаде по математике не участвовало 24 – 21 = 4 учащихся класса. Если они все участвовали в олимпиаде по физике, то в олимпиадах по математике и по физике участвовало 16 – 4 = 12 учеников класса. Если они не все участвовали в олимпиаде по физике, то в обеих олимпиадах по математике и физике участвовало более 12 учеников класса. Следовательно, наименьшее количество учащихся, которые могли принять участие в двух олимпиадах по математике и физике, равно 12.

Предположим, что в обеих олимпиадах по математике и физике участвовало 12 учащихся из класса. Если остальные 25 – 12 = 13 учащихся класса приняли участие в олимпиаде по информатике, то 18 – 13 = 5 учащихся участвовали во всех трёх олимпиадах. Рассуждением, аналогичным приведенному выше, убеждаемся, что это наименьшее количество. Это же рассуждение показывает, что увеличение количества участников двух олимпиад по математике и физике приводит к увеличению количества участников трёх олимпиад.

Ответ. Б. 5.

5. Сколько отрезков потребуется, чтобы изобразить фигуру с номером 20, которая получается из предыдущей так, как 2-я фигура, изображённая на рисунке, получается из 1-й, 3-я из 2-й, 4-я из 3-й?



1 2 3 4

А. 495. **Б.** 551. **В.** 610. **Г.** 672.

 Составим таблицу

Номер фигуры, n	1	2	3	4	5	6
Количество отрезков, k_n	2	7	15	26	40	57
Разность, $d_{1,n+1} = k_{n+1} - k_n$		5	8	11	14	17
Разность, $d_{2,n+2} = d_{1,n+2} - d_{1,n+1}$			3	3	3	3

Обнаруженная закономерность видна на рисунке: добавляется один «этаж», в котором на 3 отрезка больше, чем на самом нижнем у предыдущей фигуры. Пользуясь этой закономерностью, можно найти искомое количество отрезков. Составим таблицу:

Номер фигуры, n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	**20**
Количество отрезков, k_n	57	77	100	126	155	187	222	260	301	345	392	442	495	551	**610**
Разность, $d_{1,n+1} = k_{n+1} - k_n$	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	**59**

Из таблицы следует ответ.

Ответ. В. 610.

6. На соревнованиях 6 гимнасток набрали в одном упражнении вместе 45 баллов, получив в качестве оценок и 7, и 8, и 9 баллов и только эти баллы. Сколько гимнасток получило 7 баллов?

А. 4. **Б.** 3. **В.** 2. **Г.** 1.

 Обозначим через x, y, z количества гимнасток, получивших соответственно 7, 8, 9 баллов. Из условия следует система уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 7x + 8y + 9z = 45. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на –7 и сложив левые и правые части полученных уравнений, будем иметь: $y + 2z = 3$. Так как y и z принимают натуральные значения, то решением этого уравнения будет: $y = 1$, $z = 1$. Тогда $x = 6 – 2 = 4$.

Ответ. А. 4.

7. В классе, где учится Николай, на каникулы учитель математики задал 101 задачу. За правильно решённую задачу он начислял 3 балла, за неправильно решённую снимал 1 балл, а за задачу, которую ученик не решал, снимал 15 баллов. Николай набрал 211 баллов. К решению скольких задач он не приступал, если он решил правильно более 80, но менее 90 задач?

А. 1. **Б.** 2. **В.** 3. **Г.** 4.

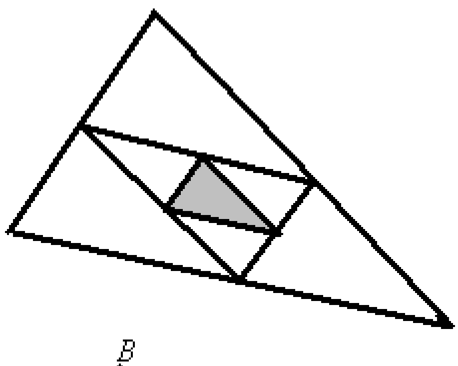
 Обозначим через x и y количества задач, которые Николай решил соответственно правильно и неправильно, тогда он не приступал к решению $(101 – x – y)$ задач. По условию, имеем уравнение $3x – y – 15(101 – x – y) = 211$, или $18x + 14y = 1726$, или $9x + 7y = 863$. Так как Николай правильно решил более 80, но менее 90 задач, то проверим, какие из значений $x = 81, 82, …, 89$, удовлетворяют последнему уравнению. Проверку представим в следующей таблице. Напомним, что x и y принимают натуральные значения.

x	81	82	83	84	**85**	86	87	88	89
Уравнение	$7y = 132$	$7y = 125$	$7y = 116$	$7y = 107$	$\mathbf{7y = 98}$	$7y = 89$	$7y = 80$	$7y = 71$	$7y = 62$
y	-	-	-	-	$\mathbf{y = 14}$	-	-	-	-

Итак, $x = 85$, $y = 14$, $101 – x – y = 2$. Следовательно, Николай не приступал к решению двух задач.

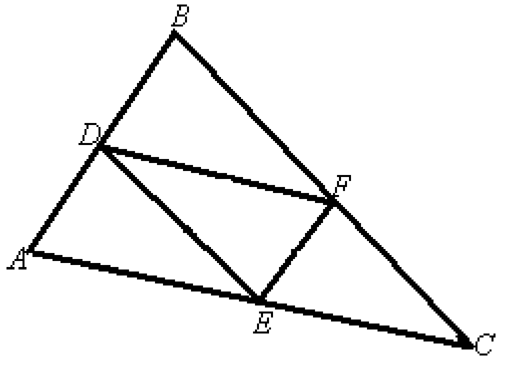
Ответ. Б. 2.

8. Средний треугольник получен соединением отрезками середин сторон большого, маленький треугольник получен соединением отрезками середин сторон среднего. Площадь закрашенного треугольника равна 1 см^2. Чему равна площадь большого треугольника?



А. 4 см^2. **Б.** 8 см^2. **В.** 12 см^2. **Г.** 16 см^2.

 Треугольники *ADE*, *DBF*, *FEC*, *DFE* равны между собой, так как при наложении одного из них на другой они совмещаются (см. рис.). Докажем, например, равенство треугольников *ADE* и *FEC*.



В этих треугольниках $AD = EF = 0{,}5AB$ по условию и свойству средней линии треугольника; $\angle DAE = \angle FEC$, как соответственные углы при параллельных и секущей, $AE = EC$ по условию. Следовательно, треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Аналогично доказывается равенство остальных указанных треугольников.

Из равенства треугольников вытекает равенство их площадей. Поэтому площадь большого треугольника в 4 раза больше площади среднего треугольника. Аналогично площадь среднего треугольника в 4 раза больше площади маленького треугольника. Таким образом, площадь большого треугольника равна $1\cdot4\cdot4 = 16$ см^2.

Ответ. Г. 16 см^2.

9. Имеется 9 одинаковых слитков золота и 11 одинаковых слитков серебра. Их взвесили (золото — на левую чашу весов, серебро — на правую), и весы оказались в равновесии. После того, как слиток золота переложили на правую чашу, а слиток серебра — на левую, левая чаша стала легче на 468 г. Какова масса одного слитка золота?

А. 1253 г. **Б.** 1287 г. **В.** 1334 г. **Г.** 2106 г.

□ Пусть x г и y г — массы одного слитка золота и одного слитка серебра соответственно. Тогда по условию имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 9x = 11y, \\ (10y + x) - (8x + y) = 468 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 9x = 11y, \\ 9y - 7x = 468, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 9x = 11y, \\ 2x = 2y + 468, \end{cases} \text{ или }$$

$$\begin{cases} 9x = 11y, \\ x = y + 234, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 9(y + 234) = 11y, \\ x = y + 234, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 1053, \\ x = 1287. \end{cases}$$ Следовательно, масса одного слитка золота равна 1287 г.

Ответ. Б. 1287 г.

10. Количество диагоналей выпуклого многоугольника больше 2015. Какое наименьшее количество вершин может быть у этого многоугольника?

А. 63. **Б.** 64. **В.** 65. **Г.** 66.

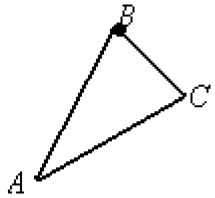
□ Пусть n — количество вершин многоугольника. Из каждой вершины выходит $(n - 3)$ диагонали. Так как в произведении $n\,(n - 3)$ каждая диагональ учитывается дважды, то количество диагоналей равно $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

По условию, $\dfrac{n(n-3)}{2} > 2015$ или $n(n - 3) > 4030$. Так как $n^2 > n(n - 3) > 4030$, то $n > 60$. Из следующих равенств $62\cdot59 = 3658$, $63\cdot60 = 3780$, $64\cdot61 = 3904$, $65\cdot62 = 4030$, $66\cdot63 = 4158 > 4030$ следует, что искомое количество диагоналей равно 66.

Ответ. Г. 66.

11. Длины ножек циркуля 5 см и 3 см. Они соединены так, что могут вращаться друг относительно друга. Какое расстояние — наименьшее и наибольшее — может быть между его концами?

□ Пусть стороны AB и BC треугольника ABC изображают ножки циркуля (см. рис.). Из условия вытекает, что угол B может принимать значения от 0° до 180°.



Из неравенства треугольника вытекает, $AC \le AB + BC = 5 + 3 = 8$ (см). Значение 8 см достигается, если точки A, B, C лежат на одной прямой в указанном порядке. Итак, наибольшее значение AC равно 8 см.

Кроме того, из неравенства треугольника вытекает, что $AC \ge AB - BC = 5 - 3 = 2$ (см). Следовательно, наименьшее значение $AC = 2$ см. Оно достигается, когда точка C лежит на отрезке AB.

Ответ. 2 см и 8 см.

12. В теннисном турнире принимали участие 9 мальчиков и 6 девочек. Каждые два участника сыграли между собой две партии. Мальчики выиграли в два раза больше партий, чем девочки. Сколько партий выиграли девочки у ребят, если ничьих не было?

 Мальчики сыграли между собой $9\cdot 8 = 72$ партии, девочки между собой — $6\cdot 5 = 30$ партий, а мальчики с девочками — $9\cdot 6\cdot 2 = 108$ партий. Пусть девочки выиграли у мальчиков x партий. Тогда мальчики выиграли у девочек $108 - x$ партий. Всего мальчики выиграли $72 + 108 - x = 180 - x$ партий, а девочки — $30 + x$ партий. Из условия следует уравнение $180 - x = 2(30 + x)$ или $3x = 120$, $x = 40$.

Ответ. 40 партий.

13. В классе 13 мальчиков и 13 девочек. На новый год каждый мальчик отправил *СМС* 6-и девочкам, а каждая девочка — 8-и мальчикам. Обязательно ли найдутся мальчик и девочка, обменявшиеся *СМС*?

 Если бы не нашлось девочки и мальчика, которые обменялись *СМС*, то количество различных пар (мальчик, девочка) было бы больше или равно $13\cdot 6 + 13\cdot 8 = 13\cdot 14 = 182$.

Но количество таких пар равно $13\cdot 13 = 169$. Следовательно, есть девочка и мальчик, которые обменялись *СМС*.

Ответ. Да.

14. Таня за 5 дней прочитала книгу, в которой 138 страниц. Каждый следующий день она читала больше, чем в предыдущий, а в последний день, в воскресенье, она прочитала в 5 раз больше, чем в первый. Какое наибольшее количество страниц могла прочитать Таня в первый день?

 Обозначим через n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 количества страниц, которые прочитала Таня в 1-й, во 2-й, в 3-й, 4-й, 5-й день. По условию, $n_5 = 5n_1$, $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 138$. Так как каждый следующий день Таня прочитывала больше страниц, чем в предыдущий, то есть $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < n_5$, то справедливо неравенство $9n_1 < n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 138$. Следовательно, $n_1 < \dfrac{138}{9} = 15\dfrac{1}{3}$.

Если $n_1 = 15$, то $n_5 = 75$. Тогда получаем неравенство

$141 = 15 + 16 + 17 + 18 + 75 \le 15 + n_2 + n_3 + n_4 + 75 = 138$.

Полученное противоречие свидетельствует о том, что $n_1 \ne 15$. Пусть $n_1 = 14$, тогда $n_5 = 70$. Так как справедливо неравенство $132 = 14 + 15 + 16 + 17 + 70 \le 138$, то Таня могла в первый день прочитать самое большее 14 страниц.

Ответ. 14 страниц.