Задания для учащихся 7 класса

1. Витя тренировал свot умение правильно оценивать время, необходимое для преодоления некоторой дистанции вдоль шоссе. При первой попытке он заявил, что ему потребуется 15 минут. Оказалось, что за 15 минут он остановился от конца намеченной дистанции на расстоянии, составляющем 25% её длины. Во сколько минут он оценил время, необходимое для преодоления дистанции при второй попытке, если за это время он удалился от конца дистанции на 10% её длины и оба раза передвигался с одной м той же скоростью?

А. В 20 мин **Б.** В 21 мин **В.** В 22 мин **Г.** В 24 мин

 Обозначим длину дистанции через a м. За 15 минут Витя прошёл a – 0,25a = 0,75a м. За одну минуту он проходит $\frac{0,75a}{15} = 0,05a$ м. Всю дистанцию в a м он пройдет за a : 0,05a = 20 минут. Проверяя вторую попытку, Витя прошёл расстояние, равное a + 0,1a = 1,1a. Для этого ему понадобилось 20·1,1 = 22 мин.

Следовательно, при второй попытке он оценил время для преодоления дистанции в 22 мин.

Ответ. В. В 22 мин.

2. В записи года рождения некоторого человека и года, когда ему исполнится 49 лет, использовано 8 различных цифр. Сколько лет ему исполнилось в 2010 году, если год, в котором ему исполнится 50 лет, будет високосным?

А. 24. **Б.** 25. **В.** 26. **Г.** 27.

 Первый год XXI столетия, записанный различными цифрами, и такой, что следующий за ним год — високосный, это 2015-й год. Составим таблицу.

Год рождения	Год рождения + 49	Год рождения + 50
1966	2015	2016
1970	2019	2020
1974	2023	2024
1978	2027	2028
1982	2031	2032
1986	**2035**	**2036**
1990	2039	2040

Из таблицы видно, что только в одном случае выполняются все условия задачи. Следовательно, рассматриваемый человек родился в 1986 году и в 2010 ему исполнилось 24 года.

Ответ. А. 24.

3. Сергей решил придать своему автомобилю вид ретро-автомобиля, в частности, чтобы его спидометр измерял скорость в верстах в час. 1 верста равна 1,0668 км. Какова скорость автомобиля в верстах в час, если спидометр показывает 45 км/ч? Выберите наиболее точное значение.

А. 41 верста в час. **Б.** 42 версты в час. **В.** 43 версты в час. **Г.** 44 версты в час.

 Скорость 45 км/ч равна $\frac{45}{1,0668} \approx 42,18$ версты в час. После округления будем иметь 42 версты в час.

Ответ. Б. 42 версты в час.

4. В компьютерном тире давали вначале возможность сделать 5 выстрелов в мишень. При каждом попадании в мишень можно было сделать ещё 3 выстрела дополнительно, а за каждые попадания два раза подряд — ещё 1 выстрел. Приз получал тот, кто смог сделать не менее 25 выстрелов. Петя получил приз, сделав ровно 25 выстрелов и израсходовав все «патроны». Сколько раз он попадал в мишень два раза подряд?

А. 6. **Б.** 5. **В.** 3. **Г.** 2.

□ Так как выстрелов было ровно 25, а возможность сделать 5 выстрелов была предоставлена вначале, то Петя получил дополнительно 25 – 5 = 20 выстрелов. Следовательно, он попал в мишень не более 6 раз (6 — неполное частное от деления 20 на 3).

При шести попаданиях в мишень (без попаданий два раза подряд) Петя получил бы дополнительно 18 выстрелов. Следовательно, он должен был дважды попасть в мишень двумя выстрелами подряд, чтобы получить ещё 2 дополнительных выстрела.

При пяти попаданиях в мишень (без попаданий два раза подряд) Петя получил бы дополнительно 15 выстрелов. Следовательно, он должен был 20 – 15 = 5 раз попасть в мишень двумя выстрелами подряд, чтобы получить 5 дополнительных выстрелов. Но при пяти попаданиях в мишень количество попаданий два раза подряд не может быть больше 4-х.

При меньшем количестве попаданий в мишень Петя получил бы ещё меньше дополнительных выстрелов. Следовательно, Петя попадал в мишень два раза подряд 2 раза.

Ответ. Г. 2.

5. Предприниматель за год удвоил свой капитал. Потом сначала потерял 1 миллион зедов (зед — условная денежная единица), а затем, благодаря удачной операции, увеличил имеющийся капитал на 30%. Но из-за кризиса он потерял 1 млн. 700 тыс. зедов и у него осталось всего на 10% больше той суммы, которая была у него в начале деятельности. Каков начальный капитал предпринимателя?

А. 0,5 млн. зедов. **Б.** 2 млн. зедов. **В.** 4 млн. зедов. **Г.** 8 млн. зедов.

□ Обозначим начальный капитал предпринимателя через *a* млн. зедов. Выразим через *a* его капитал после кризиса:

$$a \to 2a \to 2a-1 \to 1{,}3(2a-1) \to 1{,}3(2a-1)-1{,}7 = 2{,}6a-3.$$

Из условия следует уравнение: $2{,}6a - 3 = 1{,}1a$ или $1{,}5a = 3$, $a = 2$.

Ответ. Б. 2 млн. зедов.

6. В математической олимпиаде участвовало 17 из 25 учащихся класса, а в олимпиаде по информатике — 12. Какое наименьшее количество учащихся класса могли принять участие в обеих этих олимпиадах?

А. 2. **Б.** 3. **В.** 4. **Г.** 5.

□ В математической олимпиаде не участвовало 25 – 17 = 8 учеников класса. Если они все участвовали в олимпиаде по информатике, то оставшиеся 12 – 8 = 4 участника этой олимпиады участвовали в обеих олимпиадах. Если они не все участвовали в олимпиаде по информатике, то среди 12 участников олимпиады по информатике больше 12 – 8 = 4 участников олимпиады по математике. Следовательно, искомое количество равно 4.

Ответ. В. 4.

7. В прошлом году в математическом конкурсе «Золотой ключик» учащиеся 4 – 5 классов составили 40% всех участников, учащиеся 6 – 7 классов — 36% всех участников, а остальные — учащиеся 8 – 9 классов. В этом году по сравнению с прошлым годом учащихся 8 – 9 классов пришло на 75% больше, учащихся 6 – 7 классов на 37,5 % больше, а учащихся 4 – 5 классов — на 75% меньше. Какое наименьшее количество учащихся школы могло принять участие в конкурсе в этом году?

А. 203. **Б.** 200. **В.** 103. **Г.** 100.

Обозначим через a количество учащихся школы, которые приняли участие в конкурсе в прошлом году. Из условия следует, что в этом году в конкурсе приняли участие $0{,}25\cdot 0{,}4a + 1{,}375\cdot 0{,}36a + 1{,}75\cdot 0{,}24a = 1{,}015a$ учащихся. Наименьшее целое значение a, при котором полученное выражение принимает целое значение, равно 200. Тогда в этом году в олимпиаде приняло участие $200\cdot 1{,}015 = 203$ учащихся.

Полученное значение полностью согласуется с условием. Действительно, учащихся 4 – 5 классов в прошлом году участвовало $200\cdot 0{,}4 = 80$, а в этом году — $80\cdot 0{,}25 = 20$; учащихся 6 – 7 классов: в прошлом году — $200\cdot 0{,}36 = 72$, а в этом году — $72 + 72\cdot 0{,}375 = 72 + 27 = 99$; учащихся 8 – 9 классов: в прошлом году — $200\cdot 0{,}24 = 48$, а в этом году — $48 + 48\cdot 0{,}75 = 48 + 36 = 84$. Имеем: $20 + 99 + 84 = 203$.

Ответ. А. 203.

8. Из маленьких звёздочек составляются фигуры так, как это показано на рисунке. Сколько маленьких звёздочек нужно, чтобы составить 100-ю фигуру?

А. 405. **Б.** 401. **В.** 397. **Г.** 300.

Фигура 1 Фигура 2 Фигура 3

Из рисунка видно, что для каждой следующей фигуры, начиная со 2-й, нужно на 4 звёздочки больше, чем для предыдущей. К предыдущей фигуре добавляется по одной звёздочке сверху, снизу, слева и справа. Количества звёздочек, необходимых для составления 1-й, 2-й, 3-й, 4-й, 5-й и 6-й фигур, представлены в следующей таблице:

№ фигуры	1	2	3	4	5	6
Количество звёздочек	$1 = 4\cdot 0 + 1$	$5 = 4\cdot 1 + 1$	$9 = 4\cdot 2 + 1$	$13 = 4\cdot 3 + 1$	$17 = 4\cdot 4 + 1$	$21 = 4\cdot 5 + 1$

Из таблицы следует такая закономерность: количество звёздочек равно произведению числа 4 на уменьшенный на 1 номер фигуры, сложенному с 1. Следовательно, 100-я фигура составлена из $4(100 – 1) + 1 = 397$ звёздочек.

Ответ. В. 397.

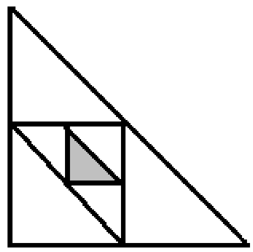
9. В школу Вова обычно шёл пешком и преодолевал расстояние, равное 2 км, за 30 мин. Однажды в ненастную погоду он часть пути проехал на автобусе, который шёл со скоростью 42 км/ч. В результате он от дома до школы добрался за 11 мин. Сколько времени Вова шёл пешком, если пешком он передвигался с постоянной скоростью?

А. 10 мин. **Б.** 9 мин. **В.** 6 мин. **Г.** 3 мин.

Предположим, что Вова все 11 минут ехал автобусом. Тогда он проехал бы $42\cdot\frac{11}{60}=\frac{77}{10}=7,7$ км. На самом деле он преодолел 2 км, то есть на 7,7 – 2 = 5,7 км меньше. Это произошло из-за того, что его скорость, равная 2:0,5 = 4 км/ч, на 42 – 4 = 38 км/ч меньше скорости автобуса. Следовательно, пешком Вова шёл 5,7:38 = $\frac{3}{20}$ ч или 9 мин.

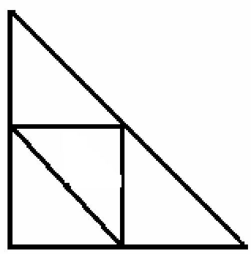
Ответ. Б. 9 мин.

10. Средний прямоугольный равнобедренный треугольник получен соединением отрезками середин сторон большого, маленький треугольник получен соединением отрезками середин сторон среднего. Площадь закрашенного треугольника равна 1 см^2. Чему равна площадь большого треугольника?



А. 4 см^2. **Б.** 8 см^2. **В.** 12 см^2. **Г.** 16 см^2.

Площадь среднего треугольника равна разности площади большого треугольника и суммы площадей трёх равных прямоугольных равнобедренных треугольников, которые отсекаются от большого треугольника проведенными отрезками (см. рис.). Поэтому площадь большого треугольника в 4 раза больше площади среднего треугольника. Аналогично площадь среднего треугольника в 4 раза больше площади маленького треугольника. Таким образом, площадь большого треугольника равна 1·4·4 = 16 см^2.



Ответ. Г. 16 см^2.

11. В итоговой турнирной таблице результаты шести команд расположены не в порядке возрастания или убывания набранных количеств очков, но при этом у команд, расположенных в соседних строках, количества очков отличаются на 3. Может ли сумма очков, набранных всеми командами, равняться 66?

Обозначим количество очков у команды, записанной в первой строке, через a. Тогда результат любой другой команды отличается от a на число, кратное 3. Следовательно, сумма результатов всех команд равна $6a + 3k$, где k — целое число. Докажем, что k — нечётное число. Тогда и число $6a + 3k$ будет нечётным и не будет делиться на 6. Из этого будет следовать, что сумма не может равняться 66, так как она не делится на 6.

Как было отмечено, результат каждой команды имеет вид $a + 3k_i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, k_i — целые числа. Для команды, записанной в первой строке, $k_i = 0$ — чётное, для команды, записанной во второй строке, $k_i = 1$ или -1 — нечётное, в третьей строке — $k_i = 2, 0, -2$ — чётное и т. д. Следовательно, для трёх команд k_i — чётное, для трёх — нечётное. Поэтому их сумма — число нечётное.

Ответ. Нет.

12. На книжной полке справа от каждого учебника по математике стоял учебник по информатике, справа от каждого учебника по информатике — учебник по биологии, справа от каждого учебника по биологии, кроме крайнего справа, — учебник по математике.

1) Какой учебник стоял крайним слева, если учебников по математике и информатике было 21?

2) Сколько книг стояло на книжной полке, если учебников по математике и по биологии было 22?

3) Какой учебник стоял 20-м, если считать слева направо и учебников по биологии было больше, чем учебников по информатике?

 Обозначим учебники буквами М, И, Б. Изобразим расположение учебников слева направо в соответствии с условием:

… ? ……….МИБ МИБ …… ? ……. МИБ.

Необходимо заполнить пропущенные места, пользуясь условием.

1) Так как количество учебников по математике и информатике нечётное, то крайними слева стояли учебники по информатике и биологии. Следовательно, крайним слева стоял учебник по информатике.

2) Из условия следует, что количества учебников по математике и по биологии одинаковые и равны 11. Так как паре учебников по математике и по биологии соответствует один учебник по информатике, то всего на полке 33 книги.

3) Так как учебников по биологии больше, чем по информатике, то крайним слева был учебник по биологии. Из равенства $20 = 1 + 3\cdot 6 + 1$ следует, что 20-м стоял учебник по математике.

Ответ. 1) Учебник по информатике; 2) 33 книги; 3) учебник по математике.

13. Павел, живущий в 50 км от места проведения соревнований по футболу, в которых он участвовал, решил поехать на турнир на велосипеде. Рассчитав время, он проехал первые 10 км с запланированной скоростью, но затем велосипед сломался и Павлу пришлось пойти пешком. Через некоторое время Павлу повезло, и последние 30 км он ехал на попутной машине. Удалось ли Павлу приехать на соревнования к запланированному сроку, если скорость его ходьбы была в 2,5 раза меньше скорости велосипеда, а скорость машины – в 6 раз больше?

 Пусть первые 10 км Павел проехал за a минут. Тогда по плану на весь путь Павел должен был затратить $a\cdot(50:10) = 5a$ минут. Пешком он прошёл $50 - 10 - 30 = 10$ км. Так как скорость его ходьбы была в 2,5 раза меньше скорости велосипеда, то на этот участок пути он затратил $2{,}5a$ минут. Поскольку скорость машины в 6 раз больше скорости велосипеда, то на последние 30 км он затратил $a\cdot(30:10):6 = 0{,}5a$ минут. Всего Павлу понадобилось $a + 2{,}5a + 0{,}5a = 4a$ минут, то есть меньше запланированного времени.

Ответ. Удалось.

14. В компании 4 мальчика и 4 девочки. На новый год каждый мальчик подарил двум девочкам подарки, а каждая девочка подарила подарки двум мальчикам. Обязательно ли найдутся мальчик и девочка, подарившие подарки друг другу?

 Нет, не обязательно. Ниже приведен пример, когда это не так.

Занумеруем мальчиков и девочек числами 1, 2, 3, 4.

Запись $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 3 \to 1, 4 \to 1, 4 \to 2$ означает, что мальчик с номером 1 подарил подарки девочкам с номерами 2 и 3 и т. д.

Запись $1 \leftarrow 1, 2 \leftarrow 1, 2 \leftarrow 2, 3 \leftarrow 2, 3 \leftarrow 3, 4 \leftarrow 3, 4 \leftarrow 4, 1 \leftarrow 4$ означает, что девочка с номером 1 подарила подарки мальчикам с номерами 1 и 2 и т. д.

Среди приведенных записей нет таких, в которых одинаковые числа слева и одинаковые числа справа. Следовательно, при указанном способе дарения не нашлось мальчика и девочки, обменявшихся подарками.

Ответ. Нет.